Équations différentielles linéaires

Une semaine

Table des matières

ECUE concerné **2**

Motivation **2**

Attendus **2**

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 **3**
Exercice 1.1 3
Exercice 1.2 3

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants **4**
Exercice 2.3 4
Exercice 2.4 4

ECUE concerné

Cette feuille de TD est un des trois chapitres de l'ECUE APEF : analyse (polynômes, équations différentielles, fonctions). Elle fait partie du B3.

Les **prérequis** sont :

— ECUE [MATH-S1-1-OBM] du séminaire.
— Résoudre une équation du second degré.
— Dériver les fonctions usuelles et leurs compositions.
— Trouver les primitives des fonctions usuelles (OBM B1)

Motivation

Une équation différentielle est une équation dont la (ou les) « inconnue(s) » sont des fonctions. Elle se présente sous la forme d'une relation reliant ces fonctions inconnues à leurs dérivées successives.

Pour notre part, nous n'étudierons ici que les équations différentielles les plus simples à résoudre : celles dites « linéaires d'ordre 1 » (à coefficients quelconques) et celles dites « linéaires d'ordre 2 » (à coefficients constants uniquement).

Vous trouverez ce type d'équations essentiellement en physique et en électronique. L'étude du mouvement d'un mobile (lien entre sa position, sa vitesse et son accélération) par exemple aboutit à une équation différentielle d'ordre 2. L'oscillation d'un pendule, de la corde d'un violon, l'étude d'un circuit RC par exemple amènent aussi à de telles équations.

Les équations différentielles sont présentent dans beaucoup de domaines : physique, chimie, dynamique de population, météorologie....

Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capables de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et 2.

Pour cela, en détails, vous devez être capables de

— Résoudre une ́quation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients quelconques (par un calcul de primitive).
— Identifier les solutions évidentes à une équation d'ordre 1.
— Trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en utilisant la méthode de variations de la constante.
— Résoudre une ́quation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
— Identifier les solutions évidentes à une équation d'ordre 2.
— Trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire et à coefficients constants d'ordre 2 quand le second membre est une fonction polynôme ou une fonction polynôme multipliée par : e^{mt} où $m \in \mathbb{R}$.

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1.1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $(x^2+1)y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x\ln(x)y' - y = 4$ sur $]1, +\infty[$.
4. $y' + y = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
5. ***(Travail personnel)*** $y' - 2xy = (1-2x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ sur $]-1, +\infty[$.
7. $(1+x^2)y' + xy = 3x^3 + 3x$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant une solution particulière polynomiale de degré 2.
8. $\cos(t)y' - \sin(t)y = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec la condition initiale $y(0) = 2$.

Exercice 1.2

Léa contracte un crédit immobilier d'un montant initial C_0 (en euros) auprès d'une banque. Le capital restant dû, $C(t)$ (en euros), évolue dans le temps selon les deux règles suivantes :

- La banque applique un taux d'intérêt constant r (par an) tout au long de la durée du crédit.
- L'emprunteur rembourse le prêt en effectuant des versements constants k (par an, en euros).

L'évolution du capital restant dû est alors décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = rC - k$$

avec

- $C(t)$: capital restant à l'instant t
- r : taux d'intérêt annuel
- k : montant annuel des remboursements
- $C(0) = C_0$: capital initial emprunté

1. Justifier l'équation différentielle décrivant l'évolution du capital restant dû.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. Justifier pourquoi on peut imposer que $k > rC_0$.
4. Déterminer le temps T nécessaire pour rembourser le prêt immobilier.
5. Application numérique : Léa emprunte 200000 euros à un taux annuel de 3% et rembourse 500 euros par mois. Combien de temps lui faudra-t-il pour rembourser son crédit ?

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 2.3

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + 10y = -5$
2. $y'' - y' - 2y = -x^2 - 3x$
3. $y'' + 2y' + 5y = xe^x$
4. ***(Travail personnel)*** $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
5. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$
6. ***(Travail personnel)*** $y'' + y = e^x$

Exercice 2.4

Pour vous entrainer chez vous :

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $2y'' + 6y' + 5y = 10x^3 + 36x^2 + 29x + 1$
2. $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 16x + 14)e^{3x}$
3. $4y'' + 16y' + 16y = 8e^{-2x}$
4. $y'' - y = 2e^x$